استخدام مقدر بيز في تقدير معلمة القياس لتوزيع رايلي المبتور من طرف اليسار

Scale Parameter Estimation of Lift Truncated Rayleigh distribution Using Bayesian Estimator

1st Mohamed Amraja Mohamed
Statistical Department
University of Sebha
Sebha, Libya
Moh.mohamed@sebhau.edu.ly

2nd Amena M. Hussein[2]
Statistical Department
University of Sebha
Sebha, Libya
Ame.hussein@sebhau.edu.ly

Article information **Abstract**

Key words
Lift Truncated Rayleigh distribution; Bayesian Method (BM) Estimator; Maximum Likelihood Method (MLM) Estimator; Method of Moment (MOM) Estimator.

كلمات مفتاحية: *توزيع رايلي المبتور من جهة اليسار، مقدر بيز، طريقة العزوم، طريقة الامكان الأعظم، اسلوب المحاكاة، متوسط مربعات الخطأ.*

Received 26 6 2023
Accepted 22 8 2023
Available online 26 8 2023

Short abstract. *Rayleigh distribution is considered as a special case of Weibull distribution, is an important distribution in the field of characterization of phenomena, especially in the analysis of survival times for many phenomena. In this paper, scale parameter is being estimated for Lift Truncated Rayleigh distribution (LTR) using Bayes method depending Jeffrey's information method and comparing it with some traditional methods such as Moments and Maximum likelihood methods to finding a scale parameter for (LTR) distribution estimate with two parameters when the shape parameter is known.*

The Mont-Carlo simulation method was used to generate random data by relying on generating sightings from Lift Truncated Rayleigh distribution with two parameters based on sample size (10, 50, 100) and a constant frequency (N = 10000). In order to compare these methods Mean Squared Error (MSE) is used as a criterion to compare the performance of the considered methods for estimating the scale parameter, as the researchers relied on the data and results are obtained by adopting simulation technique which generated by using programs and algorithms written in R Package, we predict where results have been shown to outweigh the Baye's method over other methods, especially when large samples are sized and as much as possible in some cases as small samples.

الملخص: يعتبر توزيع رايلي والذي يعتبر حالة خاصة من توزيع ويبل من التوزيعات المهمة في مجال وصف الظواهر خصوصا في تحليل اوقات البقاء لكثير من الظواهر، وقد درس الكثير من الباحثين طرق تقدير معلماته وخاصة معلمة القياس. في هذه الورقة تم التركيز على طريقة بيز المعتمد على معلومات جفري ومقارنتها مع بعض الطُرق التقليدية مثل طريقتي العزوم والامكان الأعظم لإيجاد تقدير معلمة القياس لتوزيع رايلي المبتور ذي المعلمتين عندما تكون معلمة الشكل معلومة. تم استخدام اسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو لتوليد بيانات عشوائية من خلال الاعتماد على مشاهدات مولدة من توزيع رايلي المبتور بمعلمتين بالاعتماد على حجوم عينات (10، 50، 100) وبتكرار ثابت (N=10000). ولإجراء المقارنة بين هذه الطُرق تم استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ كمعيار إحصائي لعملية المقارنة بين هذه الطرق ، حيث أظهرت النتائج تفوق طريقة بيز على بقية الطرق الاخرى خاصة عند حجوم العينات الكبيرة ومقدر الإمكان الأعظم في بعض حالات حجوم العينات الصغيرة.

1. المقدمة INTRODUCTION

يعتبر توزيع ريلي من التوزيعات الاحتمالية المهمة وهو حالة خاصة من توزيع ويبل وله دور كبير في التطبيقات الحياتية وخصوصا الطبية والصناعية[17،16،15]. قدم الباحثون [1] صيغة مقترحة لتوزيع ريلي متعدد المتغيرات. الكثير من الباحثين درسوا طرق تقدير معلماته وخاصة معلمة القياس حيث قام الباحثان بتقدير معلمة الشكل لتوزيع ريلي [2]، اما الباحث [3] فقد قام بتقدير معلمتي القياس والشكل مستخدما عدة طرق للتقدير والمقارنة بينها، كذلك قام الباحثان [21] باستخدام طرق مختلفة لتقدير معلمة توزيع ريلي المجهولة باستخدام أسلوب المحاكاة لكل من طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز للمقارنة بينهما، وبنفس الهدف استخدم الباحثان [4] بتطبيق طريقة المحاكاة لتوزيع ريلي، كذلك الباحثون [5]، اما الباحثون [6] قاموا بتقدير معلمات توزيع ريلي للبيانات تحت المراقبة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم. ولمزيد من التطبيقات حول توزيع ريلي نقترح الاطلاع على المرجع [7،14،15،16،17،20،22،23].

ان اسلوب بيز يفترض عدم التأكد من تحديد التوزيع الاولي $\pi(\theta)$ لذلك ظهرت اصناف عدة للتوزيعات الاولية لمعالجة هذه المشكلة ومن ضمن هذه الاصناف التي اهتم بها الباحثون (power considerations in acoustic emission)[8]، كما قام الباحث [9] بمقارنة تقديرات بيز لتوزيع ريلي لصيغ مختلفة لدالة الخسارة. اما الباحثان [10] استخدموا تقديرات بيز لدالة المعولية للبيانات المرتبة لتوزيع ريلي. نــاقش الباحثون [8] مشكلة التقدير البيزي وغير البيزي لمعلمة غير معروفة لتوزيـع رايلي العكسي، كما قـام البـاحثون [9] استخدام طريقـة الإمكـان الأعظـم وطريقـة العـزوم لتقدير معلمـات توزيـع رايلي العام للبيانات تحت المراقبة.

وبناء عليه فان اهمية هذه الدراسة تكمن في تقدير معلمة القياس لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار باستعمال طرق تقدير مختلفة حيث تناولت هذه الورقة طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم ومقارنتها بطريقة بيز بأسلوب جيفري وقد اعتمد معيار متوسط مربعات الخطأ كمعيار لمقارنة الاداء او الافضلية للطرق المستعملة في هذه الورقة باستعمال المحاكاة ولأحجام عينات مختلفة.

1.1 توزيع ريلي المبتور من جهة اليسار

يعد توزيع ريلي حالة خاصة من توزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل ثابتة وتساوي 2 وأول من وجد هذا التوزيع هو العالم الإنكليزي Lord Rayleigh، وان الدالة الاحتمالية لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار عند النقطة x_L بالمعلمة α (معلمة القياس Scale parameter)على النحو التالي:

(1)

$$f\left(Xl\alpha,x_L\right)=\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{\alpha}Xe^{-\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2}}{1-\left[1-e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\right]}=\dfrac{\frac{2}{\alpha}Xe^{-\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2}}{e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}}; & x_L<X<\infty,\alpha>0\\ 0 & ow\end{cases}$$

،وان دالة التوزيعية (التراكمية) للتوزيع هي [Almayali, 2014:105][Abd ELwahab, 2013:385]

(2)

$$F\left(Xl\alpha,x_L\right)=\int_{x_L}^{x}f\left(u;\alpha,x_L\right)du=1-\frac{e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}}{e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}};\quad X>x_L$$

والعزوم المركزية من المرتبة r للتوزيع تكون كالتالي:

(3)

$$E\left(x^r\right)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\sum_{j=0}^{r}C_j^r\alpha^{r-j}\times\left\{\Gamma\left(r-j+1\right)-\gamma\left[r-j+1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right]\right\}$$

حيث ان γ تمثل الحد الأعلى لدالة جاما الناقصة، وان:

$$\gamma\left[\mathrm{k},\alpha\right]=\frac{1}{\Gamma\left(k\right)}\int_{\alpha}^{\infty}u^{k-1}e^{-u}du\left(k>0,\alpha>0\right)$$

$$\gamma\left[r-j+1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right]=\left(r-j+1-1\right)!\bullet e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\bullet\sum_{k=0}^{r-j}\frac{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^{2k}}{k!}$$

$$\gamma\left[r-j+1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right]=\left(r-j\right)!\bullet e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\bullet\sum_{k=0}^{r-j}\frac{x_L^{2k}}{\alpha^{2k}k!}$$

2. طرق تقدير معلمة القياس Scale Parameter Estimation Methods

في هذا المبحث سنتناول كل من الطُرق الثلاثة: طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز لتقدير معلمة القياس (α) لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار.

1.2 طريقة العزوم (MOM) Method of Moments

تعد طريقة العزوم من أقدم الطرق والا كثرها شيوعا في التقدير الاحصائي لإيجاد المقدرات والمستخدمة في مجال تقدير النقطة لمعالم المجتمع، حيث تتركز الفكرة الأساسية بمساوة عزم المجتمع المقدر حول الصفر مع عزم العينة حول الصفر حيث إذا كان عدد المعالم (n) فأن تقدير هذه المعالم يتطلب ايجاد (n) من عزوم المجتمع بدلالة (n) من المعلومات، حيث انها تعتمد على ايجاد عزوم المجتمع ومن ثم مساواتها بعزوم العينة، وبذلك سوف يتم الحصول على عدد من المعادلات لعدد من المعالم المجهولة وبحل هذه المعادلات سوف يتم ايجاد المقدرات حيث انها تمثل الحلول الناتجة وكذلك في حالة صعوبة تطبيق طريقة الامكان الاعظم يمكن استعمال هذه الطريقة للتقدير وهي ترتكز على تقريب عزوم المشاهدة بالعزوم النظرية للمتغير(X).

نفرض ان المتغير العشوائي (X) يتوزع Lift Truncated Rayleigh(LTR)، ونفرض وجود عينة عشوائية بحجم n لمجموعة من المشاهدات $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$.

وبجعل معلمة التوزيع دالة (إحصاءة) في مشاهدات العينة. وعليه فأن مقدر العزوم لمعلمة القياس (α):

ان العزم من الرتبة k للمجتمع يكون وفق الصيغة

$$M_k=E\left(X^k\right)$$

وان العزم من الرتبة k للعينة يكون وفق الصيغة

(4)

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$$

وبمساواة العزمين للمجتمع والعينة يكون لدينا $M_k=m_k$. وبما أن التركيز على معلمة القياس للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، عليه

فان العزم الاول للمجتمع يساوي متوسط. اي انه وبتطبيق العلاقة (4) والتعويض عن $r=1$ نحصل على:

$$E(x)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\sum_{j=0}^{1}C_j^1\alpha^{1-j}\times\left\{\Gamma(2-j)-\gamma\left[2-j,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right]\right\}$$

$$E(x)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left(\alpha\left(\Gamma(2)-\gamma\left(2,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)+\left(\Gamma(1)-\gamma\left(1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)\right)$$

$$E(x)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left(\alpha\left(1-\gamma\left(2,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)+\left(1-\gamma\left(1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)\right)$$

وبعد إجراء الحسابات نحصل على قيمة الوسط الحسابي لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار

$$E(x)=\alpha\left(e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}-\frac{x_L^2}{\alpha^2}-1\right)=\bar{x}$$

وبهذا يكون مقدر معلمة القياس:

$$\bar{x}=\hat{\alpha}\left(e^{\left(\frac{x_L}{\hat{\alpha}}\right)^2}-\frac{x_L^2}{\hat{\alpha}^2}-1\right) \tag{5}$$

وان العزم الثاني للمجتمع يكون

$$M_2=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$$

اي انه وبتطبيق العلاقة (4) والتعويض عن $r=2$ نحصل على:

$$E(x^2)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\sum_{j=0}^{2}C_j^2\alpha^{2-j}\times\left\{\Gamma(3-j)-\gamma\left[3-j,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right]\right\}$$

$$E(x^2)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left(\alpha^2\left(\Gamma(3)-\gamma\left(3,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)+\alpha\left(\Gamma(2)-\gamma\left(2,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)+\left(\Gamma(1)-\gamma\left(1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)\right)$$

$$E(x^2)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left(\alpha^2\left(2-\gamma\left(3,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)+\alpha\left(1-\gamma\left(2,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)+\left(1-\gamma\left(1,\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\right)\right)\right)$$

$$E(x^2)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left(\alpha^2\left(2-4\alpha^4e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}(2\alpha^4+2\alpha^2x_L^2+x_L^4)\right)+\alpha\left(-e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}(\alpha^2+x_L^2)+\alpha^2\right)+\left(1-e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\right)\right)$$

وبهذا يكون العزم الثاني:

$$M_2=E(x^2)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left[(2\alpha^2+\alpha+1)-e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}(8\alpha^{10}+8\alpha^8x_L^2+4\alpha^6x_L^2+\alpha^3x_L^2+\alpha^5-1)\right]$$

وبمساواته بالعزم الثاني للعينة

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

فيصبح لدينا

$$M_2=E(x^2)=e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left[(2\alpha^2+\alpha+1)-e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}(8\alpha^{10}+8\alpha^8x_L^2+4\alpha^6x_L^2+\alpha^3x_L^2+\alpha^5-1)\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$$

وحيث ان الطرف الايمن يمثل تباين العينة والذي يرمز له بالرمز $\left(s^2\right)$ عليه فان

$$e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\left[(2\alpha^2+\alpha+1)-e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}(8\alpha^{10}+8\alpha^8x_L^2+4\alpha^6x_L^2+\alpha^3x_L^2+\alpha^5-1)\right]=s^2 \tag{6}$$

وبالتالي فان مقدرات العزوم لمعلمتي التوزيع هما الصيغتين (5) و (6)

وبحل المعادلات بالصيغ (5،6) يمكن الحصول على مقدرات العزوم للمعلمتين (α, x_L) ولصعوبة الحصول على معادلات صريحة لكل من المعلمتين، عليه فأنه كثيراً ما يُلجأ الى استخدام الطرق العددية Numerical Methods كطريقة نيوتن رافسون (Newton-Raphson) لحل مثل هذه المعادلات. ولتطبيق هذه الطريقة سوف نفترض ان $\underline{\theta}=(\alpha, x_L)$ اي ان:

$$\hat{\theta}_{i+1}=\hat{\theta}_i-G^{-1}\left(\underline{g}\right)$$

بحيث ان $\underline{g}$ تمثل متجه المعادلات الطبيعية، بحيث ان $\underline{g}=\left[g_1 \quad g_2\right]$ وان

$$g_1=\psi_1\left(\alpha,x_L\right)$$

$$g_2=\psi_2\left(\alpha,x_L\right)$$

وان

$$\ln L(\alpha, x_L|\underline{X}) = n[\ln(2) - \ln(\alpha)] + \frac{nx_L^2}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\alpha^2}$$

$$\psi_1(\hat{\alpha}, x_L) = \hat{\alpha}\left(e^{\left(\frac{x_L}{\hat{\alpha}}\right)^2} - \frac{x_L^2}{\hat{\alpha}^2} - 1\right)$$

$$\ln L(\alpha, x_L|\underline{X}) = n[\ln(2) - \ln(\alpha)] + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_L^2)$$

وان G تمثل مصفوفة المشتقات الجزئية من درجة 2X2. اي ان:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial x_L} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial x_L} \end{bmatrix}$$

حيث ان:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = \psi_1'(\alpha, x_L), \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_L} = \psi_1'(\alpha, x_L)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = \psi_2'(\alpha, x_L), \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_L} = \psi_2'(\alpha, x_L)$$

وبتطبيق خوارزمية نيوتن رافسون (التكرارية) نحصل على مقدرات العزوم لـ $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{x}_L)$.

2.2 طريقة الامكان الاعظم Maximum likelihood method

تعد طريقة الامكان الاعظم من الطرق المهمة والشائعة الاستخدام لأنها تحتوي على خصائص التقدير الجيد ويعرف التقدير المتحصل عليه بهذه الطريقة بأنه التقدير الذي يجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى [19].

بذلك يكون مفهوم تقدير الامكان الاعظم بناء على عينة عشوائية بحجم n لمجموعة من البيانات $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ له دالة احتمالية معلومة $f(x_i;\alpha)$ تعرف دالة الإمكان بانها الدالة المشتركة

$$L(\alpha;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha)$$

وبهذا تكون دالة الإمكان لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار والتي يمكن الحصول عليها باشتقاق لوغاريثم دالة الامكان الأعظم ومساواتها بالصفر وتكون بالصورة:

$$L(\alpha, x_L|\underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{\alpha} \frac{x e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}}{e^{-\frac{x_L^2}{\alpha^2}}} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n e^{\frac{nx_L^2}{\alpha^2}} \prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\frac{x_i^2}{\alpha^2}}; \quad x_i > x_L, i = 1,2,\dots,n \qquad (7)$$

وبأخذ اللوغاريثم الطبيعي للطرفين فان المعادلة السابقة تصبح:

$$\psi_2(\alpha, x_L) = e^{\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}\Big[(2\alpha^2 + \alpha + 1) - e^{-\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2}(8\alpha^{10} + 8\alpha^8 x_L^2 + 4\alpha^6 x_L^2 + \alpha^3 x_L^2 + \alpha^5 - 1)\Big]$$

ومن خلال المشتقات الجزئية للدالة اعلاه بالنسبة (α, x_L) نحصل على المعادلات ادناه والتى بحلها نحصل على مقدرات الامكان الاعظم.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = 0 \qquad (8)$$

$$-\frac{n}{\hat{\alpha}} + \frac{2}{\hat{\alpha}^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \hat{x}_L^2) \overset{set}{=} 0$$

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \hat{x}_L^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

ان مقدر الامكان الاعظم للمعلمة (α) يمكن الحصول عليه من خلال المعادلات (8)، وبما ان (x_L) هي الحد الأدنى للمتغير العشوائي، لذلك فان $(\ln(\mathrm{L}))$ يمكن تعظيمها تحت شرط القيد التالي:

$$x_L \le \underset{i}{Min}(x_i) \qquad (9)$$

ومن خلال المتباينة (9) يمكن الحصول على مقدر المعلمة (x_L) والتي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى.

$$\hat{x}_L \le \underset{i}{Min}(x_i) = x_{(1)} \qquad (10)$$

وبذلك يكون مقدر معلمة القياس وبعد التعويض عن قيمة $\hat{x}_L$ في المعادلة (8) هو:

$$\hat{\alpha} = \hat{x}_L^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

3.2 طريقة بيز Bayes Estimation Method

ازداد في السنوات الاخيرة من القرن الماضي وبداية القرن الحالي وبشكل مضطرد استخدام ما يُعرف بإحصاءات بيز Bayesian Statistics والتي اثبتت فاعلية واضحة في مجال الاحصاء الاستنتاجي او الاستدلالي بشقيه (التقدير واختبارات الفرضيات) مقارنة بالأدوات المستخدمة في الاحصاء التقليدي والتي تعتمد فقط على البيانات المتوفرة من العينة لحظة الاختيار ولاتأخذ في الحسبان أي معلومات سابقة عن المجتمع (التوزيع) الاحصائي، حيث ان استدلال يتميز بمعاملة المعلمة كمتغير عشوائي لها توزيع احتمالي. أن أسلوب بيز لا يعتمد فقط على معلومات العينة المسحوبة من المجتمع وإنما يستفيد من المعلومات المسبقة(prior information) حول معلمات المجتمع. ويمكن تمثيل هذه المعلومات بشكل توزيع احتمالي أولي(prior distribution) هذا التوزيع يحوي على معلومات لا بأس بها عن المعلمة [11]. مما جعله

محل اهتمام كبير من جانب الكثير من الباحثين وخصوصا فى الاحصاءات التى تستخدم المعلومات السابقة (التوزيع القبلي او السابق Prior distribution). حيث تعتمد فكرته على اساس نظرية بيز والتي تعتبر كوسيلة لإيجاد التوزيع الاحتمالي لمعلمة المجتمع قبل عملية الاختيار او معرفة هذه البيانات [13-12].

ان الاستدلال الاحصائي حول افتراض التوزيع السابق للمعلمة يتطلب الاختيار المناسب لتوزيع المعلمة. في بعض الاحيان لا توجد طريقة واضحة المعالم بحيث يمكن للمرء ان يستنتج التوزيع السابق المناسب او ان يقرر ان هذا التوزيع افضل من غيره. فمثلا اذا كانت لدينا معلمة مجهولة فان تقدير هذه المعلمة المجهولة سوف يكون متغير عشوائى قبل سحب العينة اي قبل مشاهدة بيانات العينة لذلك فان هذا المتغير العشوائى يتبع توزيع احتمالي معين.

فمثلا من الخبرة السابقة نعلم ان المعلمة من الممكن ان تكون قريبة من أي قيمة عددية في الفترة من $(0,1)$ لذلك نستطيع الافتراض ان المعلمة تختار من التوزيع المنتظم $u(0,1)$ ويسمى التوزيع السابق للمعلمة. كذلك من خبرتنا السابقة حول المعلمة، يمكن اعتبارها كقيمة لمتغير عشوائى متصل له دالة كثافة احتمالية $g(\theta)$. وبفرض اننا على وشك مشاهدة قيمة العينة التي توزيعها يعتمد على هذه المعلمة، فان دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير والذي يمثل هذه المعلمة تسمي بدالة الكثافة اللاحقة Posterior function أو التوزيع البعدي Posterior distribution وعادة ما يُعبر عنه باستخدام $\pi(\theta|\underline{x})$.

وتوجد عدد من الطُّرق المقترحة للمساعدة في اختيار التوزيع القبلي المناسب لمعلمة أو معالم التوزيع قد الاهتمام. في هذه الورقة سوف نستخدم التوزيع السابق (الاولي) باستعمال صيغة جيفري (Jeffrey's Formula) والمقترح من [9] لاستخراج التوزيع القبلي لمقدر بيز للمعلمة (α) كما يلي:

لنفترض ان لدينا عينة عشوائية بحجم n لمجموعة من البيانات $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ من توزيع ريلي. وان تقدير بيز لمعلمة القياس للتوزيع بناء على طريقة جيفري الموسعة كما يلي:

$$g(\alpha)\alpha\left[I(\alpha)\right]^c,\quad c\in R^+$$

حيث ان:

$$I(\alpha)=Var\left[\frac{\partial \log f(x;\alpha,x_L)}{\partial\alpha}\right]=-nE\left[\frac{\partial^2 \log f(x;\alpha,x_L)}{\partial\alpha^2}\right]$$

تمثل صيغة مصفوفة معلومات فيشر (ملحق A). ان التوزيع السابق للمعلمة (α) في المعادلة (1) معطى بـ

$$\boldsymbol{g(\alpha)\alpha\frac{1}{\alpha^{2c}}} \qquad \textbf{(11)}$$

وان التوزيع اللاحق لمعلمة القياس معطى بـ $\pi(\alpha/x)\alpha L(x/\alpha)g(\alpha)$ اي ان

$$\pi(\alpha/x)\alpha\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n\prod_{i=1}^{n}X_i e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(X_i^2-X_L^2\right)}\frac{1}{\alpha^{2c}}$$

$$\Rightarrow\ \pi(\alpha/x)\propto\left(\frac{2}{\alpha^{2c+1}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}X_i e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(X_i^2-X_L^2\right)}$$

$$\Rightarrow\ \pi(\alpha/x)\propto\ \alpha^{-n(2c+1)}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)}\prod_{i=1}^{n}X_i$$

$$\Rightarrow\ \pi(\alpha/x)\propto\ \alpha^{-n(2c+1)}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)}e^{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}$$

$$\Rightarrow\ \pi(\alpha/x)\alpha\ \alpha^{-n(2c+1)}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)}e^{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}$$

$$\Rightarrow\pi(\alpha/x)=k\ \alpha^{-n(2c+1)}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)}$$

حيث ان k لا تعتمد على α وان

$$k^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_L^2\right)}d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_L^2\right)}\right)^{-1}}d\alpha$$

وهي تمثل التوزيع الطبيعي بالمعلمتين

$$\left(\mu=0,\sigma^2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_L^2\right)}\right)$$

عليه فان

$$k^{-1}=\sqrt{2\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_L^2\right)\right)^{-1}$$

ومنه

$$k=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_L^2\right)}{\sqrt{2\pi}}$$

عليه فان التوزيع اللاحق للمعلمة (α) معطى بـ

$$\pi(\alpha/x)=k\ \alpha^{-n(2c+1)}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)} \qquad (12)$$

$$\pi(\alpha/x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)}{\sqrt{2\pi}}\ \alpha^{-n(2c+1)}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_L^2\right)}$$

3. المحاكاة Simulation

في هذا الجزء والذي يمثل الجانب التطبيقي لهذه الورقة تم استخدام اسلوب المحاكاة لغرض الحصول على مقدرات العزوم ومقدرات الامكان الاعظم ومقدرات بيز لمعلمة القياس (α) لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار ومن ثم المقارنة بين هذه الطرق وذلك لم يتميز به هذا الأسلوب من توفير الوقت والجهد والكلفة وفيه يتم توليد البيانات نظريا ودون التأثير على دقة النتائج. حيث تم الاستعانة ببرنامج الـ R [18] فى

اجراء تجارب المحاكاة بمراحلها من توليد البيانات الى مرحلة استخراج النتائج بالاعتماد على معيار المفاضلة بين الطرق المدروسة وذلك بتوليد عينات عشوائية من التوزيع الاحتمالي المدروس بالمعلمتين (α, x_L) فقد تم بناء التجارب وفق الخوارزمية الاتية (الملحق B):

1. تم استخدام احجام عينات افتراضية $(n = 10, 50, 100)$.
2. توليد بيانات للتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار بالمعلمتين $(\alpha = \theta, x_L = 2)$ اي عندما تكون قيمة معلمة الشكل قيمة ثابتة ومعلمة القياس مساوية لـلقيم الافتراضية $(\alpha = \theta = 1.5, 2, 3, 4)$
3. نفترض ثلاث قيم لمعلمة التوزيع السابق وكذلك اللاحق للمعلمة (α) والتي تمثل معلمة القياس للتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار وهي $c = (1, 3, 5)$.
4. اجراء التجارب المختلفة للفروض السابق ذكرها من خلال تكرار هذا التوليد للتوزيع لـ $(N = 10000)$ مرة لكل تجربة ولكل حجم عينة (n).
5. يتم استخدام صيغ التقدير بطريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم على التوالى وبطريقة بيز وفقا للتوزيع السابق واللاحق على التوالي.
6. لمعرفة افضلية التقديرات تم مقياس المقارنة والمتمثل بمعيار متوسط مربع الخطاء (MSE). والذي يمكن حسابه بالطريقة

$$MSE = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\alpha - \hat{\alpha})^2}{N}$$

حيث ان (N) تمثل التكرار وان $\hat{\alpha}$ تمثل مقدر المعلمة وفقا لواحدة من طرق التقدير، (α) تمثل معلمة التوزيع الحقيقية.

بالتطبيق الخطوات أعلاه نجد ان

$$MSE = \sum_{i=1}^{10000} \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{10000}$$

حيث ان α_i تكون احدى القيم المفترضة لمعلمة القياس، وكلما اقتربت قيمة هذا المعيار من الصفر تزداد جودة التقدير.

وكما أشرنا سابقا فقد تم استخدام برنامج R لتنفيذ هذه الخوارزمية وفق الخطوات سالفة الذكر (ملحق B)، وسنلاحظ في كل مرة ما الذي ستؤول إليه

نتائج التقدير، وذلك باستعمال معيار المفاضلة للإشارة الى جودة تلك التقديرات وكما مبين بالجدول أدناه.

الجدول (1): يبين القيم لـ $(\hat{\alpha})$ المقدرة مع قيم متوسط مجموع المربعات MSE للطرق المستخدمة

الطريقة	المعالم		المقدر لـ $\alpha(\hat{\alpha})$ حجم العينة (n)			MSE (n)		
	α	c		50	100	10	50	100
العزوم	1.5	-	1.2851	1.2944	1.25512	0.0033	0.003061	0.003011
الامكان	1.5	-	1.3186	1.2464	1.26907	0.0033	0.001002	0.003024
بيز	1.5	1	2.3626	1.6894	1.49112	0.0005	0.000985	0.000451
بيز	1.5	3	2.4652	1.1424	1.46411	0.0001	0.000791	0.000941
بيز	1.5	5	2.5096	1.9921	1.47074	0.0007	0.000581	0.0007114
العزوم	2	-	1.5604	1.6491	2.11307	0.0018	0.008515	0.0087118
الامكان	2	-	2.4204	2.2522	2.12721	0.0011	0.006938	0.0061141
بيز	2	1	1.6518	2.4666	1.91017	0.0006	0.003106	0.002346
بيز	2	3	2.4731	1.6099	2.21121	0.0008	0.000637	0.001476
بيز	2	5	2.0091	1.9991	2.17307	0.0009	0.000365	0.002385
العزوم	3	-	3.0002	4.0045	2.95521	0.0059	0.008999	0.006817
الامكان	3	-	3.0111	2.9582	2.93121	0.0008	0.001055	0.002308
بيز	3	1	3.0002	2.9601	3.11301	0.0001	0.000558	0.001431
بيز	3	3	3.0963	2.9095	2.90774	0.0001	0.001101	0.001415
بيز	3	5	3.0983	4.0295	2.93071	0.0001	0.002166	0.004306
العزوم	4	-	3.9888	4.8416	4.10707	0.0010	0.001351	0.008471
الامكان	4	-	3.9498	4.9861	4.11907	0.0023	0.001159	0.006236
بيز	4	1	3.0732	4.1642	4.12231	0.0001	0.003531	0.000531
بيز	4	3	3.9504	4.8913	3.94621	0.0001	0.000177	0.000858
بيز	4	5	3.7193	4.0896	4.17423	0.0001	0.000065	0.000867

الجدول (1): يبين القيم لـ $(\hat{\alpha})$ المقدرة مع قيم متوسط مجموع المربعات MSE للطرق المستخدمة

4. الاستنتاجات والتوصيات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل اليها من خلال النتائج المتحصل عليها بالجدول اعلاه وبشكل عام نلاحظ بان جودة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة لكل الطرق المستعملة وفقا لمعيار المفاضلة المستعمل في هذه الورقة.

1. كلما زاد حجم العينة زادت جودة التقدير باستخدام طرق التقدير المختلفة وذالك من خلال تناقص قيم متوسط مجموع مربعات الخطأ MSE .
2. مقدر بيز يعطى أصغر قيمة لـ MSE ولكل احجام العينات، وبالخصوص عندما تكون قيمة المعلمتين مساوية لـ (α=4,c=5) عند حجم العينة n=50 قيمة لـ MSE (0.000065).

بالاستناد الى النتائج المتحصل عليها في هذه الورقة من خلال تجارب المحاكاة يوصي الباحثان بالأخذ بنظر الاعتبار احجام العينات عند استخدام الطرق المذكورة انفا والتى اعطت قيم صغيرة لـ MSE لتقدير معلمة القياس للنموذج الذي يمثل التوزيع، كما نوصي باعتماد تقدير بيز لتقدير معلمة القياس لتوزيع. كما يوصي الباحث بدراسة جودة استخدام الطرق الاحصائية الحديثة في عملية تقدير المعالم لهذا التوزيع ومقارنتها مع الطرق المدروسة في هذه الدراسة. على سبيل المثال: طريقة التوقع والتعظيم Expectation and Maximization(EM) وطريقة مونتو كارلو- سلسلة ماركوف المعروفة اختصارا بـ MCMC .

5.المراجع References

[1] Zogas, D.A., Karagiannidis, G.k., Kotsopoulosis, S.A. and Mathiopoulos, P.T. (2002),"An efficient approach to the exponentially correlated Rayleigh distribution "Journal personal, Indoor and mobile radio communication international symposium, 3:1195-1199.

[2] Meintanis, S. & Iliopoulos, G. (2003), "Tests of fit for the Rayleigh distribution based on the empirical Laplace transform", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol.55, No.1, PP.137-151.

[3] Afify, E.E. (2004),"Comparison of Estimators of Parameters for the Rayleigh Distribution", Faculty of Eng. Shibeen El Kom Menoufia Univ.

[4] Lei.S., Hussain,Z.M. and Harris,R.J. (2004), "An efficient mobile Rayleigh fading channel simulator: a comparison with Clarke's model", Journal Tencon, 113-116.

[5] Chen, D.G., Lio, Y.L. and Tsai, T.R., (2011),"Parameter Estimation for Generalized Rayleigh distribution under progressively type-I interval censored data', American open journal of statistics. 46-57.

[6] Abd-Eiaziz, A.A., Amin, E.A. and Sdiman, A., (2010),"Estimation and Predication from inverse Rayleigh distribution based on lower record values "Applied Mathematical sciences, vol.4, no.62, pp 3057-3066.

[7] Weibull (1951). A statistical distribution of wide applicability. J. App. Mach, 18: 293 – 97.

[8] John T. Barnett, Roger B. Clough, and Benjamin Kedem (1995). Power Considerations in Acoustic Emission, J. Acoust. Soc. Am., 98(4):2070–2081.

[9] Dey, S. (2009). Comparison of Bayes Estimators of the Parameter and Reliability Function for Rayleigh Distribution under Different Loss Functions. Malaysian journal of Mathematical Sciences, (2):247-264.

[10] Al-Nachawati,H. and Abu-Youssef,S.E.,(2009),"A Bayesian analysis of order statistics from the Generalized Rayleigh distribution ",Applied Mathematical

sciences,3(27):1315-1325.

[11] Box, G. E. P. and Tiao, G. C., (1973). “Bayesian Inference in Statistical Analysis”, Addison–Wesley Publishing Company, Inc.

[12] Al-Nachawati, H. and Abu-Youssef, S.E., (2009),"A Bayesian analysis of order statistics from the Generalized Rayleigh distribution ", Applied Mathematical sciences, vol.3, no.27, pp 1315-1325.

[13] Arnold B. C., Castillo E., and Sarabia J. M., (1998), “Bayesian analysis for classical distributions using conditionally specified priors,” Sankhya B, 60(2): 228–245.

[14] Johnson N., Kotz S., and Balakrishnan N., (1994), Continuous Univariate Distribution, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2nd edition.

[15] Palovko, A. M. (1968), Fundamental of Reliability Theory,

Academic Press, New York, 1968.

[16] Gross, A.J.and Clark, V.A. (1975) Survival Distribution and Reliability Applications in Biomedical Sciences. Wiley, NewYork.

[17] Vikas., Deepak, N., (2009),"n-Rayleigh distribution in mobile computing over flat-fading channel " Journal proceeding of International conference on Methods and Models in computer science,IEEE.

[18] Marinho, P.R.D., Silva, R.B., Bourguignon, M., Cordeiro, G.M. and Nadarajah, S. (2019). AdequacyModel: An R package for probability distributions and general-purpose optimization, PLoS ONE, 14, 8, e0221487.

[19] Chard L. Dykstra, (1982), "Maximum Likelihood estimation of Survival Functions of Stochastically Ordered Random variables. 17(379), Journal of the American statistical Association.

[20] Muhammad Saleem and Muhammad Aslam. (2009), "On Bayesian

Analysis of the Rayleigh Survival Time Assuming the Random

Censor Time", Pak. J. Statist. 25(2): 71-82.

[21] Al Mayali, Y., M., and Al_ Shaibani, I., A., (2013),"A Comparison for Some of the Estimators of Rayleigh Distribution with Simulation", Journal of Kerbala University, 4(11).

[22] Dey, S., Dey, T., Maiti, S., (2015), "Bayes Shrinkage Estimation of the Parameter of Rayleigh Distribution for Progressive Type-II Censored Data", Austrian Journal of Statistic, 44: 3-15.

[23] Pak, A., Gholam Parham, A., and Saraj, M. (2014),"Inference for the Rayleigh Distribution Based on Progressive Type-II Fuzzy Censored Data". Journal of Modern Applied Methods, 13(1).

Appendix A

$$L\left(\alpha, x_L \mid \underline{X}\right)=\prod_{i=1}^{n} \frac{2}{\alpha} X_i e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(X_i^2-X_L^2\right)}$$

$$\ln L\left(\alpha, x_L \mid \underline{X}\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2}{\alpha} X_i e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(X_i^2-X_L^2\right)}\right)=\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{2}{\alpha} X_i e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(X_i^2-X_L^2\right)}\right)$$

$$\ln L\left(\alpha, x_L \mid \underline{X}\right)=\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{2}{\alpha} X_i e^{-\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^2}\right)+n\left(\frac{X_L}{\alpha}\right)^2$$

$$\ln L\left(\alpha, x_L \mid \underline{X}\right)=n \ln(2)-n \ln(\alpha)+\sum_{i=1}^{n} \ln\left(X_i\right)-\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^2+n\left(\frac{X_L}{\alpha}\right)^2$$

$$\ln L\left(\alpha, x_L \mid \underline{X}\right)=\ln L\left(\alpha, 0 \mid \underline{X}\right)+n\left(\frac{X_L}{\alpha}\right)^2$$

حيث ان $L\left(\alpha, 0 \mid \underline{X}\right)$ تمثل دالة الإمكان الأعظم لتوزيع ريلي القياسي.

$$\ln L\left(\alpha, x_L \mid \underline{X}\right)=n \ln(2)-n \ln(\alpha)+\sum_{i=1}^{n} \ln\left(X_i\right)-\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^2+n\left(\frac{X_L}{\alpha}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L(\alpha,x_L\,|\,\underline{X}) = -\frac{n}{\alpha} + 2\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2 - 2n\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2\frac{1}{\alpha} = 0$$

$$-n\alpha^2 + 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2nx_L^2 = 0$$

$$\alpha = \left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_L^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\ln L(\alpha,x_L\,|\,\underline{X}) = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^2 + \frac{6n}{\alpha^2}\left(\frac{x_L}{\alpha}\right)^2$$

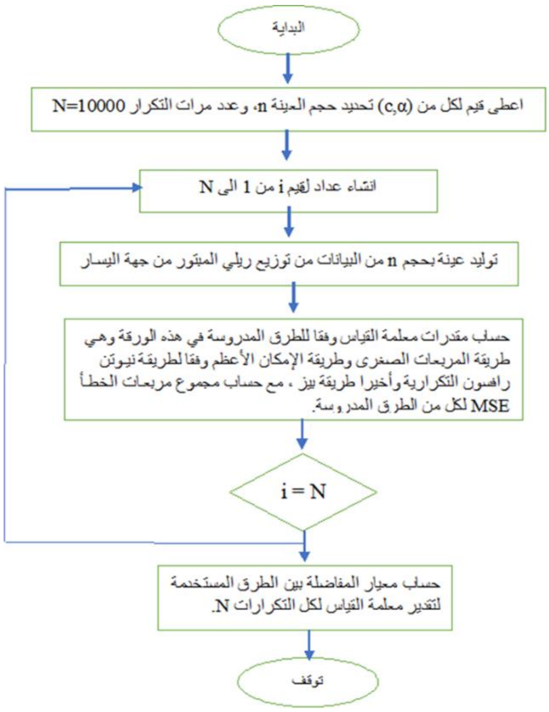
$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\ln L(\alpha,x_L\,|\,\underline{X}) = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^4}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_i^2\right)$$

وإجراء التكامل نحصل على ان قيمة $d^2 = x_i^2 - x_L^2$ وبوضع هذا التكامل مساوية للصفر. وبالتالي تكون النتيجة ان معلومات فيشر هي:

$$I(\alpha) = -\frac{n^2}{\alpha^2}$$

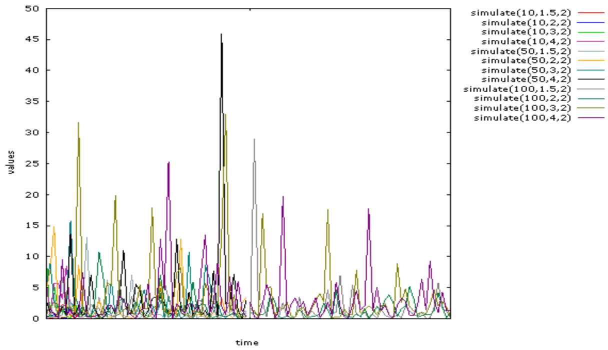
Appendix B

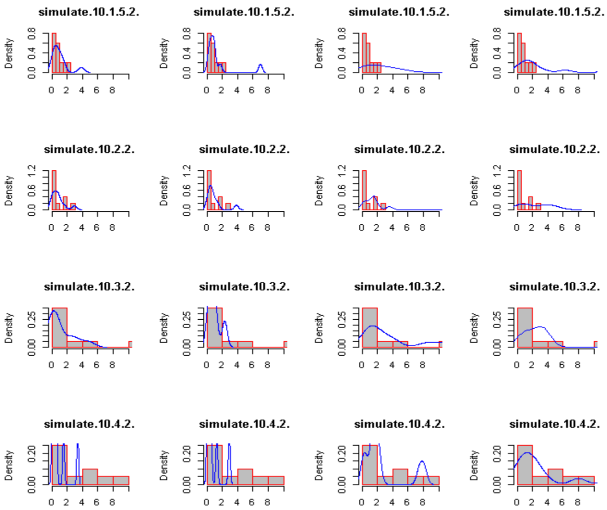
خوارزمية حساب مقدرات معلمة القياس لتوزيع ريلي المبتور من جهة اليسار.

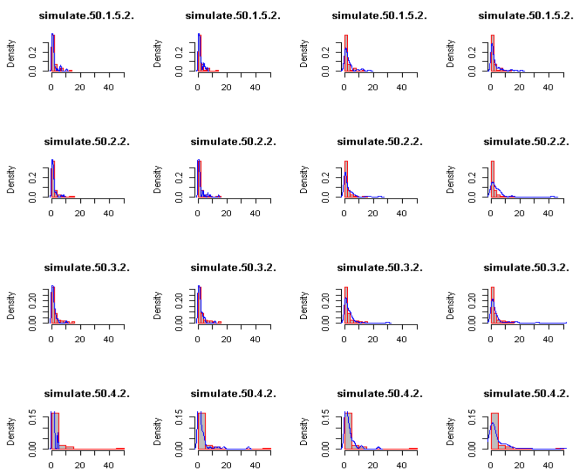


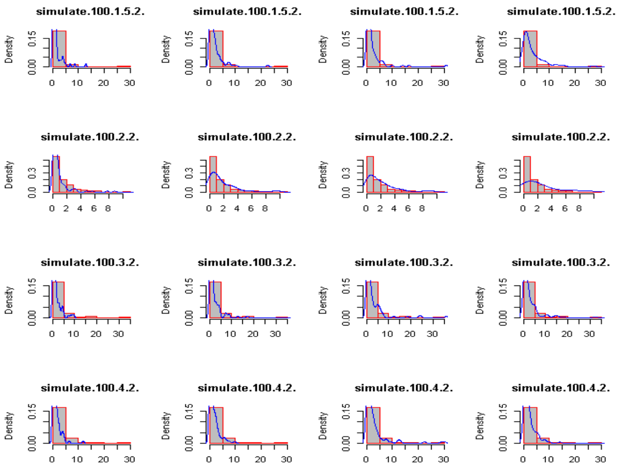
Appendix C

الاشكال البيانية التالية توضح توزيع ريلي وفقا لأسلوب المحاكاة بأحجام عينات مختلفة وقيم مختلفة لمعالم التوزيع مع منحى الدالة وفقا للمعالم.








simulate.100.1.5.2.
simulate.100.2.2.
simulate.100.3.2.
simulate.100.4.2.
Density