



الحل العددي لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger وتحليل الاستقرار العددية

نجية محمد عيسى أبوجلالة

جامعة مصراتة، قسم الرياضيات، ليبيا

سمية محمد عيسى أبوجلالة

جامعة مصراتة، قسم الرياضيات، ليبيا

المخلص

لقد تم حل معادلة Korteweg-de Vries-Burger بطريقتين من طرائق الفروقات المنتهية وهما الطريقة الصريحة وطريقة الفروقات المنتهية الأسية وقد تمت دراسة الاستقرار العددية بطريقة Fourier (von-Neuman) للطريقتين علي كافة نقاط المشبك للتأكد من استمرارية النقاط التي تم معالجتها بالأسلوب المقترح. وقد تمت مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام تلك الطرق مع نتائج الحل المضبوط ووجد تقارباً ممتازاً بين الحل التحليلي والحلول العددية للطريقتين.

استلمت الورقة بتاريخ 2021/04/06، وقبلت بتاريخ 2021/05/14، ونشرت بتاريخ 2021/05/16
الكلمات المفتاحية: طريقة الفروقات المنتهية - الطريقة الصريحة - طريقة الفروقات المنتهية الأسية - الاستقرار العددية

إن صيغة معادلة Korteweg-de Vries-Burger تكون بالشكل

الآتي: [6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

حيث أن μ, ε, v معاملات ثوابت والشروط الابتدائي هو $u(x, 0) = u_0(x)$ والشروط الحدودية هي:

$$\begin{aligned} u(a, t) = \beta_1, u(b, t) = \beta_2 \quad t \geq 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0 \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

وكحالات محددة لمعادلة KdV-B تصبح معادلة KdV عندما

$$v \rightarrow 0 \text{ ومعادلة Burger عندما } \mu \rightarrow 0$$

إن من أكثر الطرق استخداماً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية هي طريقة الفروقات المنتهية finite differences التي تعطي تقريبات جيدة للحل.

3. الطريقة الصريحة: Explicit method

إلي $R = \{(x, t): a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq c\}$ نقسم المستطيل من المستطيلات طول كل ضلع منها $n-1$ و $m-1$ $\Delta x = h, \Delta t = k$

[4] كما في الشكل (1):

1. المقدمة

درس العديد من الباحثين معادلة Korteweg-de Vries-Burger وتكتب اختصاراً (KdV-B) وتشكل هذه المعادلة نموذج الانتشار Dispersion والتبدد أو التشتيت Dissipation وغير الخطي [2]. من المعروف جيداً أن الكثير من الظواهر الفيزيائية يمكن أن توصف باستخدام هذه المعادلة. من الأمثلة التطبيقية علي المعادلة، شروط سلوك الموجات الطويلة في الماء والموجات السطحية في البلازما. كما أنها تلائم نمط موجة لا خطية لمانع في انبوب مطاطي، والمانع مضطرب بفعل فقاعات صغيرة تتحرك بداخله. هذه المعادلة تعتبر تعميم ذو بعد واحد للوصف النموذجي لحقول السرعة والكثافة اللذان يأخذان في الحسبان قوة الضغط بالإضافة الي اللزوجة والتفرق، قد تكون معادلة KdV-B أداة أكثر مرونة للفيزيائيين من معادلة Burger [7].

في [10] اعتبرنا مسألة الاستقرار الأسي الشامل باستخدام حدود التغذية الاسترجاعية لمعادلة KdV_Burger علي الفترة $[0, 1]$ ، في [1] اقترح الباحث قانون سيطرة أكثر دقة والذي أوجد الحل وأثبت الوجود والاستقرارية لحل حدود السيطرة الناتج لمعادلة KdV_Burger. في [3] قدم الباحث طريقة Decomposition جديدة نسبياً لإيجاد الحلول الصريحة والحلول العددية لكل من معادلة

KdV_Burger، معادلة Burger's ومعادلة KdV.

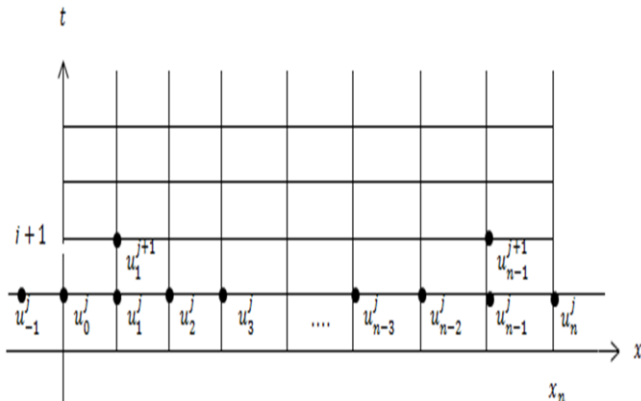
في [6] درس الباحثون دراسة معادلة KdV-B وتطبيق طريقة الفروقات المنتهية مع الشبكة المتغيرة مع طريقة شبه التحليلية ل-Adomain decomposition. في [2] قدم الباحث حلولاً عددية لمعادلة KdV_Burger باستخدام متعددات حدود Bernstein المعدلة.

وفي هذا البحث قمنا بحل معادلة KdV_Burger باستخدام طريقتين من طرق الفروقات المنتهية وهما الطريقة الصريحة وطريقة الفروقات المنتهية الأسية وستتم معالجة الطريقتين لا يجاد الحل لهذه المعادلة بسبب احتوائها علي المشتقة الثالثة في حدودها ومقارنة النتائج مع الحل التحليلي، كما سيتم دراسة تحليل استقراره الحل العددي لكل من الطريقتين.

2. النموذج الرياضي

$$+ \left[\frac{r h \varepsilon}{2} u_i^j + 4 r v + \frac{12 r}{h} \mu \right] u_{i+2}^j + \left[-r v - 7 \frac{r}{h} \mu \right] u_{i+3}^j + \frac{3 r \mu}{2 h} u_{i+4}^j \quad (6)$$

إن المعادلة (6) تمثل تقريب الفروقات المنتهية عند النقطة x_1 من المشبك باستخدام الطريقة الصريحة لمعادلة KdV-B كما موضح في الشكل (2)



شكل (2) يوضح الحل عند النقطة التي خارج منطقة الحل عند حساب u_{i-1}^{j+1} , u_i^{j+1} ولإيجاد بقية القيم التقريبية $u(x_i, t_j)$ حيث $i = 2, 3, \dots, n-2$ في الصف نفسه نعوض بالمعادلات الفرقية المركزية وهي

$$u_x(x_i, y_i) = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \quad (7)$$

$$u_{xx}(x_i, y_i) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j - u_{i-1}^j}{h^2} \quad (8)$$

$$u_{xxx}(x_i, y_i) = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2h^3} \quad (9)$$

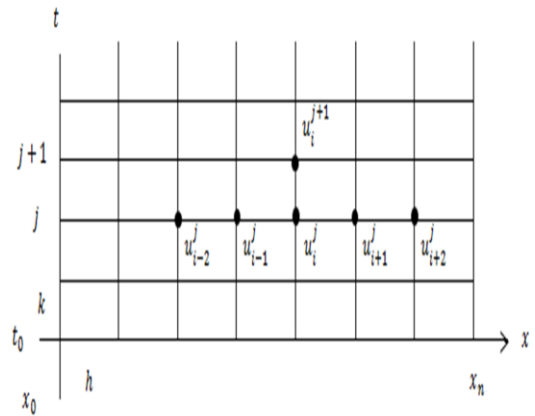
بالمعادلة (1) لنحصل علي ما يلي:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{r h \varepsilon}{2} u_i^j [u_{i+1}^j - u_{i-1}^j] + r v [u_{i+1}^j - 2u_i^j - u_{i-1}^j] - \frac{r \mu}{2 h} [u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j]$$

إذ أن $r = \frac{k}{h^2}$ وبإعادة ترتيب المعادلة نحصل علي:

$$u_i^{j+1} = \left[r v + \frac{r}{h} \mu \right] u_{i+1}^j - \frac{r}{2 h} \mu u_{i+2}^j + \left[1 - \frac{r h}{2} \varepsilon (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - 2 r v \right] u_i^j + \left[r v - \frac{r}{h} \mu \right] u_{i-1}^j + \frac{r}{2 h} \mu u_{i-2}^j \quad (10)$$

المعادلة (10) تمثل تقريب الفروقات المنتهية باستخدام الطريقة الصريحة حيث يتم حساب الصف $j+1$ بواسطة القيم المعلومة للصف j



شكل (1)

تبدأ الحسابات من الصف الأول $t = t_0 = 0$ أي نحسب قيم الحل من الشرط الابتدائي

$u(x, 0) = u_0(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ثم نحسب التقريبات $u(x, t)$ عند نقاط المشبك للصفوف الأخرى.

وأسلوب الحل الجديد هو الآتي:

لحساب القيمة التقريبية للحل $u(x_i, t_j)$ عندما $i = 1$ نستخدم المعادلات الفرقية التقدمية Forward finite difference [5] وهي كالتالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3} \quad (5)$$

ونعوض بها في المعادلة (1) نحصل علي:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \varepsilon u_i^j \left[\frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h} - v \left[\frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2} \right] + \mu \left[\frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3} \right] \right] = 0$$

بفرض أن $r = \frac{k}{h^2}$ وإعادة ترتيب المعادلة يكون لدينا:

$$u_i^{j+1} = \left[1 + \frac{3 r h \varepsilon}{2} u_i^j + 2 r v + \frac{5 r}{2 h} \mu \right] u_i^j + \left[-2 r h \varepsilon u_i^j - 5 r v - \frac{9 r}{h} \mu \right] u_{i+1}^j$$

$$\frac{u_{0+1}^j - u_{0-1}^j}{2h} = 0 \Rightarrow u_1^j = u_{-1}^j \quad (15)$$

وعندما نحصل علي ما يلي

$$\frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2h} = 0 \Rightarrow u_{n+1}^j = u_{n-1}^j \quad (16)$$

والآن بالنسبة للتقريب العددي للشرط الحدودي الثاني

$$\frac{\partial^2 u(a, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(b, t)}{\partial x^2} = 0$$

باستخدام معادلة التقريبات المركزية من الرتبة الرابعة للمشتقة الثانية [4] هي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+2}^j + 16u_{i+1}^j - 30u_i^j + 16u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{12h^2} \quad (17)$$

نعوض بـ $i = 0$ وبتعويض المعادلة (14) نحصل علي ما يلي:

$$u_{-2}^j = 32u_1^j - 30u_0^j - u_2^j \quad (18)$$

وبالأسلوب نفسه عندما $i = 1$ نحصل علي ما يلي:

$$u_{n+2}^j = 32u_{n-1}^j - 30u_n^j - u_{n-2}^j \quad (19)$$

نعوض كلا من المعادلتين (15) و(18) في المعادلة (10) عندما $i = 0$ نحصل علي المعادلة (20) بعد التبسيط

$$u_0^{j+1} = \left[1 - 2rv - \frac{15r}{h}\mu \right] u_0^j + \left[2rv + \frac{16r\mu}{h} \right] u_1^j - \frac{r}{h}\mu u_2^j \quad (20)$$

ونعوض كلا المعادلتين (16) و (19) في المعادلة (10) عندما $i = n$ فنحصل علي ما يلي

$$u_n^{j+1} = \left[1 - 2rv + \frac{15r}{h}\mu \right] u_n^j + \left[2rv - \frac{16r\mu}{h} \right] u_{n-1}^j + \frac{r}{h}\mu u_{n-2}^j \quad (21)$$

ب. تحليل الاستقرار العددية للطريقة الصريحة باستخدام طريقة Fourier(von-Neuman):

لدراسة استقرارية الطريقة نستخدم طريقة Fourier(von-Neuman) إذ يتم في هذه الطريقة استبدال الحل بالصيغة

$\psi(t)e^{i\beta x}$ حيث $\beta = \sqrt{-1}$, i هو ثابت موجب [7] عند العقدة الثانية من المشبك ($n = 1$) نستخدم المعادلات الفرقية الآتية

عند نقاط المشبك $i = 2, 3, \dots, n - 2$ إذ نلاحظ أن القيم المجهولة u_i^{j+1} يتم حسابها بدلالة القيم المعروفة $u_{i+1}^j, u_{i+2}^j, u_i^j, u_{i-1}^j, u_{i-2}^j$ كما موضح في الشكل (1) وأخيراً تحسب القيمة التقريبية $u(x_i, t_j)$ عند $i = n - 1$ لنفس الصف وذلك بتعويض بالمعادلات الفرقية الخلفية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{2h} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{5u_i^j - 18u_{i-1}^j + 24u_{i-2}^j - 14u_{i-3}^j + 3u_{i-4}^j}{2h^3} \quad (13)$$

في المعادلة (1) نحصل علي:

$$u_{n-1}^{j+1} = \left[1 - \frac{3rh\varepsilon}{2} u_{n-1}^j + 2rv - \frac{5r}{2h}\mu \right] u_{n-1}^j + \left[2rh\varepsilon u_{n-1}^j - 5rv - \frac{9r}{h}\mu \right] u_{n-2}^j + \left[-\frac{rh\varepsilon}{2} u_{n-1}^j + 4rv - \frac{12r}{h}\mu \right] u_{n-3}^j + \left[-rv + 7\frac{r}{h}\mu \right] u_{n-4}^j - \frac{3r\mu}{2h} u_{n-5}^j \quad (14)$$

حيث $r = \frac{k}{h^2}$

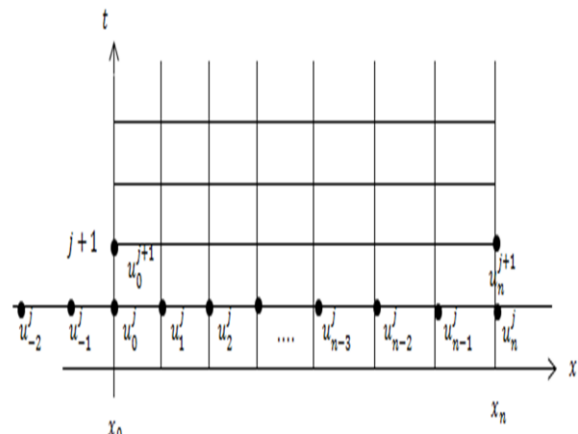
المعادلة (14) تحسب الحل عند x_{n-1} من المشبك.

أ. الشروط الحدودية:

لتقريب الشروط الحدودية لمعادلة Kdv-Burger باستخدام الطريقة الصحيحة تحتاج لتعريف النقاط

$$x_{-2} = x_0 - 2\Delta x, x_{-1} = x_0 - \Delta x, x_{n+1} = x_n + \Delta x, x_{n+2} = x_n + 2\Delta x$$

إذا هذه النقاط تقع خارج الشبكة كما في الشكل (3)



شكل (3) يوضح النقاط التي تقع خارج المشبك في المستويين $j, j + 1$

الآن باستخدام الفروقات المركزية للشرط الحدودي الأول

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0$$

باستخدام المعادلة (7) للمشتقة الأولى عندما $i = 0$ نحصل علي

$$\begin{aligned} & [v + z[4\sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) \\ & - 4i\sin(\beta h)\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin^2(\beta h)]] \\ & = A + iB = \xi \end{aligned}$$

إذ أن الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية هو

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = \xi \leq 1$$

وبمأن ξ هو عدد مركب عليا فإن ولكي تكون $|\xi| \leq 1$ من الضروري $A^2 + B^2 \leq 1$ وبأخذ $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) = 1$ لبعض قيم βh وبفرض أن $\sin^2(\alpha k)$ تأخذ أكبر قيمة يعني الواحد الصحيح [5] عليه نحصل علي

$$A^2 + B^2 = (1 - r(-2y + 7z - 3v))^2 + r^2(-11y - 4v - 24z)^2$$

وبالتعويض عن قيم y, z يكون لدينا

$$r \leq \frac{2\left(-5v + \frac{17\mu}{2h}\right)}{\left(-5v + \frac{17\mu}{2h}\right)^2 + \left(15v + \frac{47\mu}{h}\right)^2} \quad (24)$$

$$k \leq \frac{2h^2\left(-5v + \frac{17\mu}{2h}\right)}{\left(-5v + \frac{17\mu}{2h}\right)^2 + \left(15v + \frac{47\mu}{h}\right)^2} \quad (25)$$

أما بالنسبة لعقد المشبك من العقدة الثالثة إلى العقدة $2 - \rho$ نستخدم المعادلات الفرقية الآتية

$$\begin{aligned} & \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} \\ & = v \left[\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m - u_{n-1}^m}{h^2} \right] \\ & - \mu \left[\frac{u_{n+2}^m - 2u_{n+1}^m + 2u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2h^3} \right] n \\ & = 2, \dots, \rho - 2 \end{aligned} \quad (26)$$

وبالتعويض عن u_n^m بـ $\psi(t)e^{i\beta x}$ في المعادلة (26) وبعد التبسيط نحصل علي

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} & = 1 - 4vr\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \\ & + \frac{4ir\mu}{h}\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h) = \xi \end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned} & \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} \\ & = v \left[\frac{2u_n^m - 5u_{n+1}^m + 4u_{n+2}^m - u_{n+3}^m}{h^2} \right] \\ & - \mu \left[\frac{-5u_n^m + 18u_{n+1}^m - 24u_{n+2}^m + 14u_{n+3}^m - 3u_{n+4}^m}{2h^3} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

نعوض u_n^m بـ $\psi(t)e^{i\beta x}$ إذ أن $i = \sqrt{-1}$, $\beta > 0$ فنحصل علي

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(t+k)e^{i\beta x} - \psi(t)e^{i\beta x}}{k} \\ & = v \left[\frac{2\psi(t)e^{i\beta x} - 5\psi(t)e^{i\beta(x+h)}}{h^2} + \right. \\ & \left. \frac{4\psi(t)e^{i\beta(x+2h)} - \psi(t)e^{i\beta(x+3h)}}{h^2} \right] \\ & - \mu \left[\frac{-5\psi(t)e^{i\beta x} + 18\psi(t)e^{i\beta(x+h)} - 24\psi(t)e^{i\beta(x+2h)}}{2h^3} \right. \\ & \left. + \frac{14\psi(t)e^{i\beta(x+3h)} - 3\psi(t)e^{i\beta(x+3h)}}{2h^3} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

بضرب طرفي المعادلة (23) بـ $\frac{k}{e^{i\beta x}}$ وفرض أن $r = \frac{k}{h^2}$ نحصل علي

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} & = 1 + vr[2 - 5e^{i\beta h} + 4e^{2i\beta h} - e^{3i\beta h}] \\ & + \frac{\mu r}{2h}[5 - 18e^{i\beta h} + 24e^{2i\beta h} \\ & - 14e^{3i\beta h} + 3e^{4i\beta h}] \end{aligned}$$

باستخدام مبرهنة مفكوك ذي الحدين [6] وبالتبسيط نحصل علي

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} & = 1 + vr[(1 - e^{i\beta h})^3 + (1 - e^{i\beta h})^2] \\ & + \frac{\mu r}{2h}[3(1 - e^{i\beta h})^4 + 2(1 - e^{i\beta h})^3] \\ & = 1 + ry(1 - e^{i\beta h})^3 \\ & + r(1 - e^{i\beta h})^2(v + z(1 - e^{i\beta h})^2) \end{aligned}$$

حيث أن $y = \left(v + \frac{\mu}{h}\right)$, $z = \frac{3\mu}{2h}$ بتبسيط المعادلة أعلاه نحصل علي ما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} & = 1 + ry[8\sin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 12i\sin(\beta h)\sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) \\ & - 6\sin^2(\beta h)\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + i\sin^3(\beta h)] \\ & + r[4\sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4i\sin(\beta h)\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \\ & - \sin^2(\beta h)] \end{aligned}$$

$$F(u_i^{j+1}) = F(u_i^j) + kF'(u_i^j) \left(-\varepsilon u_i^j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j - \mu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j \right) \quad (33)$$

إذ أن k يمثل مقدار خطوة الزمن والآن لو فرضنا أن $F(u) = \ln u$ فسوف نحصل على صيغة الفروقات الأسية كما يلي

$$u_i^{j+1} = u_i^j \exp \left(\frac{k}{u_i^j} \left[-\varepsilon u_i^j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j - \mu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j \right] \right) \quad (34)$$

لغرض تفادي وجود نقاط تقع خارج المشبك نوضح الآن المعالجة الخاصة بها عند استخدام طريقة الفروقات المنتهية للمشتقات وحسب الصيغ الآتية:-

عندما $i = 1$ نعوض بالمعادلات (3)، (4)، (5) في المعادلة (34) نحصل على الحل u_1^{j+1} عند النقطة x_1 ولحساب الحلول u_i^{j+1} عندما $i = 2, 3, \dots, n-2$ نستخدم الفروقات المركزية وهي المعادلات (7)، (8)، (9) ونعوض بها في المعادلة (34) وأخيراً عندما $i = n-1$ نعوض بالمعادلات (11)، (12)، (13) في المعادلة (34) للحصول على الحل u_{n-1}^{j+1} عند النقطة x_{n-1} .

أ. الشروط الحدية:

لايجاد الحل عند الشروط الحدية نأخذ عندما $i = 0$ من الشرط الحدي الأول نحصل على

$$u_1^j = u_{-1}^j \quad (35)$$

وعندما $i = n$ نحصل على

$$u_{n+1}^j = u_{n-1}^j \quad (36)$$

وبالنسبة للشرط الحدي الثاني عندما نحصل على

$$u_{-2}^j = 32u_1^j - 30u_0^j - u_2^j \quad (37)$$

وعندما

نحصل على $i = n$

$$u_{n+2}^j = 32u_{n-1}^j - 30u_n^j - u_{n-2}^j \quad (38)$$

نعوض كل من المعادلتين (35) و(37) في المعادلة (34) عندما $i = 0$ لنحصل على المعادلة (39) بعد التبسيط

$$u_0^{j+1} = u_0^j \exp \left(\frac{k}{u_0^j} \left[v \left(\frac{2u_1 - 2u_0}{h^2} \right) - \mu \left(\frac{32u_2 - 2u_1 - 30u_0}{2h^3} \right) \right] \right) \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A + iB \\ A &= 1 - 4\mu r \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \\ B &= \frac{4r\mu}{h} \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \sin(\beta h) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ولكي تكون $|\xi| \leq 1$ من الضروري $A^2 + B^2 \leq 1$ أي أن

$$A^2 + B^2 = 1 - 8vr \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 16r^2 v^2 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + \frac{16r^2 \mu^2}{h^2} \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \sin^2(\beta h) \quad (28)$$

وبأخذ $\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) = 1$ لبعض قيم βh ويفرض أن $\sin^2(\alpha h)$ تأخذ أكبر قيمة مساوية للواحد الصحيح [3] عليه تصبح المعادلة (28) كما يلي:

$$r \leq \frac{v}{2 \left(v^2 + \frac{\mu^2}{h^2} \right)}, \quad k \leq \frac{vh^2}{2 \left(v^2 + \frac{\mu^2}{h^2} \right)} \quad (29)$$

وباستخدام نفس أسلوب دراسة استقرارية الحل العددي عند العقدة $n = 1$ نحصل على شرط الاستقرارية عند العقدة $n = \rho - 1$ وهو

$$r \leq \frac{2 \left(-5v - \frac{17\mu}{2h} \right)}{\left(5v + \frac{17\mu}{2h} \right)^2 + \left(15v - \frac{47\mu}{h} \right)^2} \quad (30)$$

إذاً تكون الطريقة الصريحة لحل معادلة KdV -Burger مستقرة في نقاط الشبكة $n = 2, \dots, \rho - 2$ إذا تم اختيار الخطوة الزمنية k وخطوة الطول h بحيث تحقق القيد (29) وعند العقدة الثانية والعقدة $\rho - 1$ تكون الطريقة مستقرة تحت شرط تحقيق القيد في المعادلتين (25)، (30) وهذا يعتمد على اختيار كلاً من h, v, μ .

4. اشتقاق صيغة طريقة الفروقات المنتهية

Exponential finite difference scheme: الأسية Kdv-Burger المعادلة

نفرض أن $F(u)$ ترمز لأي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق بضرب المعادلة (1) بمشتقة F ينتج

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = F'(u) \left(-\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (31)$$

وهذا يؤدي إلى

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'(u) \left(-\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (32)$$

باستخدام الفروقات التقدمة وتعويضها عن $\frac{\partial F}{\partial t}$ نحصل على معادلة الفروقات التي تشمل المعادلة التالية

وباستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

ومن المعادلة (43) نجد أن

$$|\xi| = |\exp(A + iB)| = e^A \leq 1$$

عليه تكون $|\xi| \leq 1$ فقط إذا كانت $A \leq 0$ أي

$$r \left(5v - \frac{17\mu}{2h} \right) \leq 0$$

وبما أن $r \geq 0$ دائماً صحيحة عليه يجب أن يكون

$$5v - \frac{17\mu}{2h} \leq 0 \Rightarrow 5v \leq \frac{17\mu}{2h} \Rightarrow h \leq \frac{17\mu}{10h} \quad (44)$$

الحالة الثانية يتم دراسة استقرارية الحلول عند العقد $n = 3, \dots, \rho - 2$ باستخدام المعادلات الفرقية التالية

$$\begin{aligned} u_n^{m+1} &= u_n^m \exp \left(\frac{k}{u_n^m} \left[v \left(\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m - u_{n-1}^m}{h^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mu \left(\frac{u_{n+2}^m - 2u_{n+1}^m + 2u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2h^3} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (45)$$

نعوض عن u_n^m بـ $\psi(t)e^{i\beta h}$ في المعادلة (45) نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} &= \exp \left[vr \left(e^{i\beta h} - 2 - e^{-i\beta h} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu r}{2h} \left(e^{2i\beta h} - 2e^{i\beta h} + 2e^{-i\beta h} - e^{-2i\beta h} \right) \right] \end{aligned}$$

عليه

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} &= \exp \left[vr(2\cos(\beta h) - 2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu r}{2h} (2i \sin(2\beta h) - 4i \sin(\beta h)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} &= \exp \left[-4vr \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\mu r i}{h} \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \sin(\beta h) \right] \\ &= e^{A+iB} = \xi \end{aligned} \quad (46)$$

حيث

ونعوض كل من المعادلتين (36)، (38) في المعادلة (34) عندما $i = n$ نحصل على

$$\begin{aligned} u_n^{j+1} &= u_n^j \exp \left(\frac{k}{u_n^j} \left[v \left(\frac{2u_{n-1} - 2u_n}{h^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mu \left(\frac{32u_{n-1} - 2u_{n-2} - 30u_n}{2h^3} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (40)$$

ب. تحليل الاستقرارية لطريقة الفروقات المنتهية الأسية باستخدام طريقة (Fourier (von-Neumann):

نستخدم المعادلة (34) التي تحصلنا عليها من اشتقاق الطريقة

$$\begin{aligned} u_n^{m+1} &= u_n^m \exp \left(\frac{k}{u_n^m} \left[-\varepsilon u_n^m \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_n^m + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_n^m \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_n^m \right] \right) \end{aligned}$$

بحذف الجزء الغير خطي من المعادلة (34) يكون لدينا

$$u_n^{m+1} = u_n^m \exp \left(\frac{k}{u_n^m} \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_n^m - \mu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_n^m \right] \right) \quad (41)$$

الآن باستخدام (Fourier (von-Neumann) لدراسة الاستقرارية العددية تبدأ بالحل عند العقدة الثانية أي عندما $n = 2$ تستخدم المعادلات الفرقية التالية

$$\begin{aligned} u_n^{m+1} &= u_n^m \exp \left[\frac{k}{u_n^m} v \left(\frac{2u_n^m - 5u_{n+1}^m + 4u_{n+2}^m - u_{n+3}^m}{h^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mu \left(\frac{-5u_n^m + 18u_{n+1}^m - 24u_{n+2}^m + 14u_{n+3}^m - 3u_{n+4}^m}{2h^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

نعوض عن u_n^m بـ $\psi(t)e^{i\beta h}$ في المعادلة (42) وبعد التبسيط نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} &= \exp \left[ry(1 - e^{i\beta h})^3 \right. \\ &\quad \left. + r(1 - e^{i\beta h})^2 (v + z(1 - e^{i\beta h})^2) \right] \end{aligned}$$

حيث $r = \frac{k}{h^2}$, $z = \frac{3\mu}{2h}$, $y = \left(v + \frac{\mu}{h} \right)$ نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = e^{A+iB} = \xi \quad (43)$$

حيث

$$A = r \left(5v - \frac{17\mu}{2h} \right), B = -r \sin(\beta h) \left(15v + \frac{47\mu}{h} \right)$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

من المعادلة (48) نجد أن

$$|\xi| = |e^{A+iB}| = e^A = e^{r(5v + \frac{17\mu}{2h})} \leq 1$$

وبما أن $r \geq 0$ دائماً صحيحة عليه فإن

$$5v + \frac{17\mu}{2h} \leq 0 \Rightarrow h \geq -\frac{17\mu}{10v} \quad (49)$$

وبما أن خطوة الطول h لا يمكن أن تكون سالبة أي أن المتباينة (49) تؤدي إلى أن $h > 0$ وهذه صحيحة دوماً .
إذاً طريقة الفروقات المنتهية الأسية لحل معادلة Kdv-B تكون مستقرة بدون شرط ضمن نقاط المشبك
 $i = 3, \dots, \rho - 2$ أما العقدة الثانية فتكون مستقرة إذا تم اختيار طول الخطوة h بحيث تحقق القيد في المعادلة (44) أما الخطوة الزمنية k فهي غير مشروطة وكذلك الحال عند العقدة $n - 1$.

5. الخوارزميات العددية:

أ. خوارزمية الطريقة الصحيحة حسب الاسلوب المقترح:

نقاط نهايات الفترة (a, b) ، الشرط الابتدائي، الشروط الحدية، m, n ،
الخراج U تمثل الحل التقريبي لـ u عند (X, t)
الخطوة (1): ضع $k = 0.02$ ، $h = (b - a)/n - 1$ ، حيث
 $X_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n; t_j = jk, j = 0, 1, 2, \dots, m$
الخطوة (2): ضع $r = \frac{k}{h^2}$
الخطوة (3): لكل $j = 2, 3, \dots, m - 1$ نضع $i = 1, 2, \dots, n - 1$
الخطوة (4): إذا كان $i = 1$ ضع

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} = & \left[1 + \frac{3rhe}{2} u_i^j + 2rv \right. \\ & + \frac{5r}{2h} \mu \left. \right] u_i^j \\ & + \left[-2rhe u_i^j - 5rv \right. \\ & - \frac{9r}{h} \mu \left. \right] u_{i+1}^j \\ & + \left[\frac{rhe}{2} u_i^j + 4rv + \frac{12r}{h} \mu \right] u_{i+2}^j \\ & + \left[-rv - 7\frac{r}{h} \mu \right] u_{i+3}^j + \frac{3r\mu}{2h} u_{i+4}^j \end{aligned}$$

ماعدًا ذلك $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ضع

$$A = -4vr \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right), B = \frac{4i\mu r}{h} \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \sin(\beta h)$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1 \Rightarrow |\xi| = |e^{A+iB}| = e^A$$

بما أن $e^{-4vr \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)} \leq 1$ صحيحة دائماً عندما $|\xi| \leq 1$
الحالة الثالثة دراسة الاستقرارية الحل عند العقدة $n - 1$ باستخدام المعادلات الفرقية

$$\begin{aligned} u_n^{m+1} = & u_n^m \exp \left(\frac{k}{u_n^m} \left[v \left(\frac{2u_n^m - 5u_{n-1}^m + 4u_{n-2}^m - u_{n-3}^m}{h^2} \right) \right. \right. \\ & - \mu \left(\frac{u_n^m - 18u_{n-1}^m + 24u_{n-2}^m - 14u_{n-3}^m}{2h^3} \right. \\ & \left. \left. + 3u_{n-4}^m \right) \right] \right) \quad (47) \end{aligned}$$

نعوض عن u_n^m بـ $\psi(t)e^{i\beta h}$ في المعادلة (47) ويتبسط المعادلة
وبفرض علي أن $r = \frac{k}{h^2}$ نحصل علي

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = & \exp[vr(2 - 5e^{-i\beta h} + 4e^{-2i\beta h} - e^{-3i\beta h}) \\ & - \mu \frac{r}{2h} (5 - 18e^{-i\beta h} + 24e^{-2i\beta h} \\ & - 14e^{-3i\beta h} + 3e^{-4i\beta h})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = & \exp[r(1 - e^{-i\beta h})^3 \left(v - \frac{\mu}{h} \right) \\ & + r(1 - e^{-i\beta h})^2 \left(v \right. \\ & \left. - \frac{3\mu}{2h} (1 - e^{-i\beta h})^2 \right)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = & \exp[ry(1 - e^{-i\beta h})^3 \\ & + r(1 - e^{-i\beta h})^2 (v + z(1 - e^{-i\beta h})^2)] \end{aligned}$$

حيث $y = \left(v - \frac{\mu}{h} \right)$ ، $z = \frac{3\mu}{2h}$ ويتبسط المعادلة أعلاه نحصل علي

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = e^{A+iB} = \xi \quad (48)$$

حيث

$$A = r \left(5v + \frac{17\mu}{2h} \right), \quad B = r \sin(\beta h) \left(15v - \frac{47\mu}{h} \right)$$

ماعدًا ذلك $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ضع

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^j &= \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2h^3} \end{aligned}$$

ماعدًا ذلك إذا $i = n - 1$ ضع

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j &= \frac{3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{2h} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j &= \frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^j &= \frac{5u_i^j - 18u_{i-1}^j + 24u_{i-2}^j - 14u_{i-3}^j + 3u_{i-4}^j}{2h^3} \end{aligned}$$

الخطوة (5): اخراج الحل التقريبي u لـ U
الخطوة (6) توقف.

6- النتائج العددية:

في هذه الفقرة سنقدم النتائج العددية لكل من لطريقتين مع نتائج الحل التحليلي لمعادلة $kdv-B$ علماً بأن الحل التحليلي للمعادلة [7] هو

$$u(X, t) = \frac{12v^2}{\varepsilon\mu} \left[1 - \frac{e^{\frac{2v}{\varepsilon\mu}(X-wt)}}{\left(e^{\frac{v}{\varepsilon\mu}(X-wt)} + E\right)^2} \right], w = \frac{12v^2}{25\mu},$$

$$E = 1000$$

حيث أن E ثابت موجب وسيتم أخذ قيم المعلومات

$\mu = 2, v = 1, \varepsilon = 6, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, a = 0, b = 220$
مع خطوة الطول $h = 4.4$ وخطوة الزمن $k = 0.02$ والشرط الابتدائي

$$u(X, 0) = \frac{12v^2}{\varepsilon\mu} \left[1 - \frac{e^{\frac{2v}{\varepsilon\mu}X}}{\left(e^{\frac{v}{\varepsilon\mu}X} + E\right)^2} \right], w = \frac{12v^2}{25\mu},$$

$$E = 1000$$

الجدول (1) يوضح المقارنة العددية مع الحل التحليلي لمعادلة $kdv-B$ عند الزمن $t = 0.78$

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= \left[rv + \frac{r}{h}\mu\right]u_{i+1}^j - \frac{r}{2h}\mu u_{i+2}^j \\ &+ \left[1 - \frac{rh}{2}\varepsilon(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - 2rv\right]u_i^j \\ &+ \left[rv - \frac{r}{h}\mu\right]u_{i-1}^j \\ &+ \frac{r}{h}\mu u_{i-2}^j \end{aligned}$$

ماعدًا ذلك إذا $i = n - 1$ ضع

$$\begin{aligned} u_{n-1}^{j+1} &= \left[1 - \frac{3rh\varepsilon}{2}u_{n-1}^j + 2rv - \frac{5r}{2h}\mu\right]u_{n-1}^j \\ &+ \left[2rh\varepsilon u_{n-1}^j - 5rv - \frac{9r}{h}\mu\right]u_{n-2}^j \\ &+ \left[\frac{-rh\varepsilon}{2}u_{n-1}^j + 4rv - \frac{12r}{h}\mu\right]u_{n-3}^j \\ &+ \left[-rv + 7\frac{r}{h}\mu\right]u_{i-4}^j - \frac{3r\mu}{2h}u_{i-5}^j \end{aligned}$$

الخطوة (5): اخراج الحل التقريبي لـ u
الخطوة (6) توقف.

ب. خوارزمية طريقة الفروقات المنتهية الأسية حسب الاسلوب المقترح:

نقاط نهايات الفترة (a, b) ، الشرط الابتدائي، الشروط الحدية، n ،

m

الاخراج U تمثل الحل التقريبي لـ u عند (X, t)

الخطوة (1): ضع $h = (b - a)/n - 1, k = 0.02$ حيث

$$X_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n; t_j = jk, j = 0, 1, 2, \dots, m$$

الخطوة (2): ضع $r = \frac{k}{h^2}$

الخطوة (3): لكل $j = 2, 3, \dots, m - 1$ نضع $i = 1, 2, \dots, n - 1$

الخطوة (4): بحسب الحل التقريبي من المعادلة:

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= u_i^j \exp \left(\frac{k}{u_i^j} \left[-\varepsilon u_i^j \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j \right. \right. \\ &\left. \left. - \mu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^j \right] \right) \end{aligned}$$

بالتعويض عن صيغ المشتقات كما يلي:

إذا كان $i = 1$ ضع

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j = \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^j = \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3}$$

- (1) لغرض الحصول علي استقرارية عالية للحلول العددية نختار قيمة ν صغيرة جداً بحيث تكون أقل قيمة من ε, μ
- (2) الطريقة الصريحة أفضل من الطريقة الأسية بسبب استقراريتها وعدم وجود شرط أو قيد علي خطوة الزمن أو الطول.

المراجع:

- [1] Lpidus, Leon and George, F.P. (1982). Numerical solution of partial differential equation in science and engineering, John Wiley and Sons, Inc.
- [2] M.A. Helal, and M.S. Mehanna. (2006). A Comparison Between Two Different Methods for Solving Kdv-Burgers Equation, Chaos, Solitons and Fractals, 28, 320-326.
- [3] Handschuh, Robert F. (1987), An Exponential Finite Difference Technique for Solving Partial Differential Equations, Toledo, Uni. of Ohio, NASA, Technical Memorandum 89874, M.S. Thesis.
- [4] Handschuh, Robert F and Theo G. Keith Jr. (1988). Application of an Exponential Finite Difference Technique, NASA, Technical Memorandum 100939, AVSCOM, Technical Memorandum 88-C-004.
- [5] Duffy, Daniel J. (2006). Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach, England, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO198SQ, John Wiley and Sons Ltd.
- [6] Dambaru Bhatta. (2008). Use of Modified Bernstein Polynomials to Solve KdV-Burger Equation Numerically, Applied Mathematics and Computation, 206, 457-464
- [7] Bahadir, A. Refik. (2005). Exponential finite-Difference method applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times, Applied Mathematics and Computation, Vol. 160, pp. 675-682.
- [8] El-Danaf, Talaat S. Aly. (2002). Numerical Solution of the Korteweg-de Vries-Burgers equation by using Quintic Spline Method, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Vol. XLVII, NO. 2, PP. 41-54.
- [9] Dogan Kaya. (2004). An Application of Decomposition Method for the KdVB Equation, Applied Mathematics and Computation, 152, 279-288.
- [10] K. Pandey, Lajja Verma and Amit K. Vema. (2013). Finite Difference scheme for KdV_B equation, Vol. 2, pp 91-101, DOI: 10.1007/s40065-012-0050-1, published with open access at Springer link.

X	Exact	Exponential	Explicit
0	0.99999932624044	0.999998766149803	0.999998712256139
4.4	0.999997987668127	0.999998083519912	0.999997903333935
8.8	0.999995815566631	0.999997913418975	0.999995619471871
13.2	0.999991303736930	0.999996101408924	0.999990899159164
17.6	0.999981941505814	0.999991974194164	0.99998110241937
22	0.999962543185285	0.999983337163270	0.999960806129813
26.4	0.999922435654783	0.999965416131520	0.999918848682515
30.8	0.999839762871690	0.999928315649784	0.999832382743685
35.2	0.99967009454551	0.999851703686165	0.999654989381921
39.6	0.999324053347861	0.999694066765786	0.999293369216703
44	0.998624533375440	0.999371365235314	0.998562873571399
48.4	0.997228080288785	0.998715529918503	0.997106077750193
52.8	0.994488864716713	0.997396222016609	0.994252712185175
57.2	0.989244681920124	0.994779941663109	0.988801447843384
61.6	0.979530965685836	0.989693377210444	0.978733580239306
66	0.962311166706003	0.980068196775228	0.960955626911133
70.4	0.933465563381	0.962509472310757	0.931322774493811
74.8	0.888425167385377	0.932015622444632	0.885326039328458
79.2	0.823719042351667	0.882431483828123	0.819672787187269
83.6	0.739056639779843	0.808501284421371	0.734325942167770
88	0.638699687922964	0.709641986135487	0.633749477963090
92.4	0.530834559717686	0.593029910539086	0.526164098674638
96.8	0.4250006881730879	0.472101626572020	0.420971787500265
101.2	0.329144067201218	0.360496367454479	0.325909541872948
105.6	0.247920354282644	0.266676463794935	0.245458662542005
110	0.182653772630981	0.192946414345514	0.180848198952491
114.4	0.132305894441087	0.137558342374382	0.131012793240828
118.8	0.094632924363880	0.097133669509687	0.093720186414245
123.2	0.067065926261973	0.068162379881568	0.066427049747052
127.6	0.047215517392239	0.047637229124000	0.046770407654858
132	0.03308431541377	0.033202776582897	0.032775005747224
136.4	0.023105613565871	0.02310026247113	0.022890919326204
140.8	0.016099047410125	0.016051999473230	0.015950141414386
145.2	0.011198895369784	0.011145017300485	0.011095655132758
149.6	0.007781383240044	0.007733672986539	0.007709817541510
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
202.4	0.000096088945770	0.000095213615223	0.000095210016775
206.8	0.000066595015765	0.000065987937233	0.000065986251834
211.2	0.000046153758633	0.000045739270743	0.000045738860362
215.6	0.000031986769380	0.000031647132589	0.000031646727393
220	0.000022168293733	0.000020028812713	0.000020016028352

7- النتائج العددية:

من المعروف أن معادلة Korteweg-de Vries-Burger من المعادلات المهمة في التطبيقات الفيزيائية غير أنها تعد من النماذج الصعبة للمعادلات الغير خطية وتحتاج إلي جهد كبير لغرض ايجاد الحل العددي لها كما تحتاج إلي دقة كبيرة في معالجة المشتقة الثالثة واختيار ثوابت المعادلة ولغرض ايجاد الحلول عندما تظهر لدينا نقاط خارجية لا يمكن ايجاد قيمها باستخدام الشروط الحدودية إذ أن المعالجة المقترحة نجحت في تحسين الحل العددي والمحافظة علي خواص الطرق وندرج أهم الاستنتاجات التي توصلنا إليها: